24-10-16

<u>Διαίρεση πολυωνύμων</u> (μιας μεταβλητής)

$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7$, με $g(x) = x^2 - 3$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - 5x^2 + 0x + 7 & x^2 - 3 \\
-3x^3 \qquad\quad + 9x & 3x - 5 \\
\hline
-5x^2 + 9x + 7 & \\
+5x^2 \qquad - 15 & \\
\hline
9x - 8 &
\end{array}
$$

Άρα, $3x^3 - 5x^2 + 7 = (x^2-3)(3x-5) + 9x - 8$

Θεωρούμε τον δακτύλιο των πολυωνύμων $K[x_1, \dots, x_n]$ με συντελεστές από κάποιο σώμα K.

<u>Ορισμός:</u> Ένα μονώνυμο M είναι ένα πολυώνυμο του $K[x_1, \dots, x_n]$ της μορφής $M = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, όπου $a_i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$. Ο φυσικός αριθμός $a_1 + \dots + a_n$ λέγεται βαθμός του M και συμβολίζεται με $\deg(M)$.

• Το μονώνυμο $M = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ θα το συμβολίζουμε x^a, όπου $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

__Π.χ.__ i) $x_1^2 x_2^3 x_4 \in K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ θα συμβολίζεται με: $x^{(2,3,0,1)}$

ii) Στο $K[x_1, x_2, x_3]$:

$x_1^3 x_2 = x^{(3,1,0)}$

$x_1^2 x_2 x_3^5 = x^{(2,1,5)}$

$x^{(1,3,7)} = x_1 x_2^3 x_3^7$

$x^{(0,0,4)} = x_3^4$

• Το σύνολο των μονωνύμων του $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ θα το συμβολίζουμε με T^n.

__Πρόταση__: Υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων T^n και $\mathbb{N}_0^n$

__Π.χ.__ · T^1 $\qquad\qquad$ $\mathbb{N}_0^1 \equiv \mathbb{N}_0$

$\{1, x_1, x_1^2, \ldots, x_1^m, \ldots\}$ $\qquad$ $\{0, 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$

$x_1^k \longleftrightarrow k$

__Ορισμός__: Μια μερική διάταξη σ' ένα σύνολο S είναι μια σχέση $<$ με τις εξής ιδιότητες:

i) Δεν ισχύει $x < x$, για τυχόν $x \in S$

ii) Αν $x_1 < x_2$ και $x_2 < x_3 \Longrightarrow x_1 < x_3$, τυχόν $x_1, x_2, x_3 \in S$

__Ορισμός__: Μια μερική διάταξη $<$ σ' ένα σύνολο S καλείται ολική διάταξη αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in S$ ισχύει ακριβώς μια από τις σχέσεις: $x_1 < x_2$ ή $x_1 = x_2$ ή $x_1 > x_2$.

Ορισμός: Μια μονωνυμική διάταξη στον $K[x_1,\dots,x_n]$ είναι μια ολική διάταξη $<$ στο T^n με τα εξής:
1) $1 < x^a$, $\forall x^a \in T^n$ και $x^a \neq 1$
2) Αν $x^{a_1} < x^{a_2}$, τότε $x^a x^{a_1} < x^a x^{a_2}$, $\forall x^a \in T^n$

Παρατηρήσεις
1) Δεν ισχύει $x^a < x^a$
2) Αν $x^{a_1} < x^{a_2}$ και $x^{a_2} < x^{a_3} \Rightarrow x^{a_1} < x^{a_3}$
3) Αν $x^a, x^b \in T^n$ τότε $x^a < x^b$ ή $x^a = x^b$ ή $x^a > x^b$
4) $1 < x^a$, $\forall x^a \neq 1$
5) Αν $x^a < x^b$ τότε $x^\gamma x^a < x^\gamma x^b$.

Ασκ Στο $T^1 = \{1, x_1, x_1^2, \dots, x_1^m, \dots\}$
Ορίζουμε $x_1^a < x_1^b \iff b-a \in \mathbb{N}$. Ν.δ.ό είναι μονωνυμική διάταξη.

Λύση
1) • Έστω $x_1^a < x_1^a \Rightarrow a-a=0 \in \mathbb{N}$, Άτοπο
Άρα, $x_1^a < x_1^a$, δεν ισχύει για τυχόν $x_1^a \in T^1$
2) • Έστω $x_1^{a_1} < x_1^{a_2}$ και $x_1^{a_2} < x_1^{a_3} \Rightarrow a_2 - a_1 \in \mathbb{N} \wedge a_3 - a_2 \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow a_2 - a_1 + a_3 - a_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_3 - a_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x_1^{a_1} < x_1^{a_3}$
3) • Έστω $x_1^a, x_1^b \in T^1$ τότε:
$a-b \in \mathbb{N}$ ή $a-b=0$ ή $b-a \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$x_1^b < x_1^a$ ή $x_1^a = x_1^b$ ή $x_1^a < x_1^b$.
4) • Έστω $x^a \neq 1$: $\Rightarrow a \in \mathbb{N} \iff a-0 \in \mathbb{N} \iff x_1^0 < x_1^a \Rightarrow$
$1 < x_1^a$
5) • Έστω $x_1^a < x_1^b \iff b-a \in \mathbb{N} \Rightarrow (\gamma+b)-(\gamma+a) \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$x_1^{\gamma+a} < x_1^{\gamma+b} \iff x_1^\gamma x_1^a < x_1^\gamma x_1^b$.
Έτσι, έδειξα όλες τις ιδιότητες όπου αυτή η μονωνυμική διάταξη είναι ολική διάταξη.

Ερώτημα: Είναι η μοναδική διάταξη στον T^1;

Απάντηση

Έστω $<'$ μια μονωνυμική διάταξη στον $K[x_1]$

Πρέπει ν.δ.ό $x_1^a <' x_1^b \Leftrightarrow b-a \in \mathbb{N}$

($\Leftarrow$) Έστω ότι ισχύει $b-a \in \mathbb{N} \Rightarrow x_1^{b-a} \neq 1 \xRightarrow{4} 1 <' x_1^{b-a}$

$\xRightarrow{5} x_1^a <' x_1^a x_1^{b-a} \Rightarrow x_1^a <' x_1^b$

($\Rightarrow$) Έστω $x_1^a < x_1^b \Rightarrow$ i) $b-a \in \mathbb{N}$

ii) $a-b \in \mathbb{N} \Rightarrow x_1^b <' x_1^a \xRightarrow{3} x_1^b <' x_1^b$ Άτοπο

iii) $a-b=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow x_1^a = x_1^b$, Άτοπο

Συμπέρασμα: Η μονωνυμική διάταξη $x_1^a < x_1^b \Leftrightarrow b-a \in \mathbb{N}$ είναι η μοναδική διάταξη στο $K[x_1] = T^1$.

Ορισμός: Η λεξικογραφική διάταξη $>_{lex}$ στον $K[x_1, \dots, x_n]$ με $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ ορίζεται ως εξής:

$$x^{a_1} >_{lex} x^{a_2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{η πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη του} \\ a_1 - a_2 \text{ είναι θετική} \end{array} \right\}$$

Π.χ. Έστω στο $K[x_1, x_2, x_3]$ με $x_1 > x_2 > x_3$ παίρνω:

$M_1 = x_1^3 x_2^{2017} x_3$

$M_2 = x_1^4$

$M_3 = x_1^3 x_2^{23} x_3^2$ Άρα, $M_2 >_{lex} M_1 >_{lex} M_4 >_{lex} M_3$

$M_4 = x_1^3 x_2^{23} x_3^5$

Π.χ. Στο $K[x_1, x_2, x_3, x_4]$

$x^{(3,7,4,1)}$ και $x^{(3,7,6,1204)}$

αφού $6-4>0$ τότε: $x^{(3,7,6,1204)} > x^{(3,7,4,1)}$

Π.χ) Στο $K[x_1,x_2]$ με $x_1 > x_2$ έχω (στα μονώνυμα)

$1 <_{lex} x_2 <_{lex} x_2^2 <_{lex} \dots <_{lex} x_2^k <_{lex} \dots$

$x_1 <_{lex} x_1x_2 <_{lex} x_1x_2^2 <_{lex} \dots <_{lex} x_1x_2^k <_{lex} \dots$

$\vdots$

$x_1^m <_{lex} x_1^m x_2 <_{lex} x_1^m x_2^2 <_{lex} \dots <_{lex} x_1^m x_2^k <_{lex} \dots$

Π.χ) Το $x_1^3 x_2^5 x_4^7$ γράφεται:

- Αν $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$, τότε $x^{(3,5,0,7)}$
- Αν $x_4 > x_2 > x_1 > x_3$, τότε $x^{(7,5,3,0)}$

Ορισμός: Η βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη $>_{deglex}$ στον $K[x_1,\dots,x_n]$ με $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ ορίζεται ως εξής:

$x^{a_1} >_{deglex} x^{a_2} \iff deg(x^{a_1}) > deg(x^{a_2})$ ή

$x^{a_1} >_{deglex} x^{a_2} \iff deg(x^{a_1}) = deg(x^{a_2})$ και $x^{a_1} >_{lex} x^{a_2}$

Π.χ) $M_1 = x_1^5 x_2^7 x_3^{12}$

$M_2 = x_1^{12} x_2^6 x_3^6$

$M_3 = x_1^6 x_2^8 x_3^{10}$

$M_4 = x_1^{1453} x_2^5 x_3^7$

$M_5 = x_1 x_2 x_3$

Λύση

Βλέπω ότι $deg(M_1) = deg(M_2) = deg(M_3) = 24$

και $deg(M_4) > deg(M_5) = 3$. Μετά κοιτάω το $>_{lex}$.

Άρα τελικά έχω $M_4 >_{deglex} M_2 >_{deglex} M_3 >_{deglex} M_1 >_{deglex} M_5$

Ορισμός: Η αντίστροφη βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη $>_{degrevlex}$ στον $K[x_1,\dots,x_n]$ με $x_1 > \dots > x_n$ ορίζεται ως:

$x^{a_1} >_{degrevlex} x^{a_2} \iff deg(x^{a_1}) > deg(x^{a_2})$ ή

$x^{a_1} >_{degrevlex} x^{a_2} \iff \left\{ deg(x^{a_1}) = deg(x^{a_2})\right.$ και η τελευταία μη μηδενική συντεταγμένη του $a_1 - a_2$ είναι αρνητική $\}$

$\boxed{\Pi.\chi}$ Στον $K[x_1,x_2]$ με $x_1>x_2$ έχω: (στα μονώνυμα)

$1 <_{deglex}$

$x_2 <_{deglex} x_1 <_{deglex}$

$x_2^2 <_{deglex} x_1x_2 <_{deglex} x_1^2 <_{deglex}$

$x_2^3 <_{deglex} x_1x_2^2 <_{deglex} x_1^2x_2 <_{deglex} x_1^3 <_{deglex}$

$\vdots$

$x_2^m <_{deglex} x_1x_2^{m-1} <_{deglex} \cdots <_{deglex} x_1^{m-1}x_2 <_{deglex} x_1^m <_{deglex}$.

• Η αντίστροφη βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη συμπίπτει με την βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη στον $K[x_1,x_2]$